

Q.01

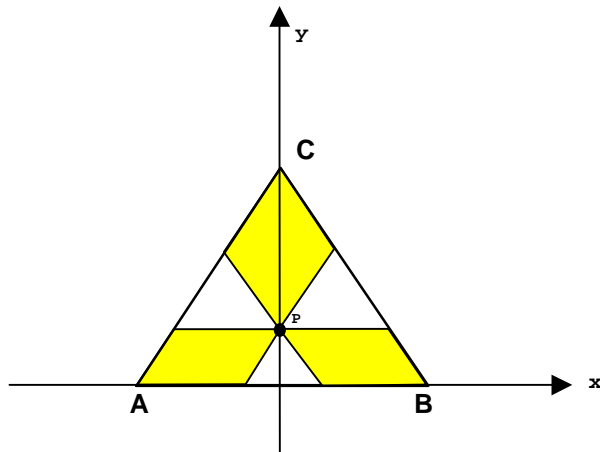
Um número inteiro positivo  $n$  de 4 algarismos decimais satisfaz às seguintes condições:

- I) a soma dos quadrados dos 1º e 4º algarismos é 58;
- II) a soma dos quadrados dos 2º e 3º algarismos é 52;
- III) se deste número  $n$  subtrairmos o número 3816, obteremos um número formado pelos mesmos algarismos do número  $n$ , mas na ordem contrária.

Qual é esse número?

Q.02

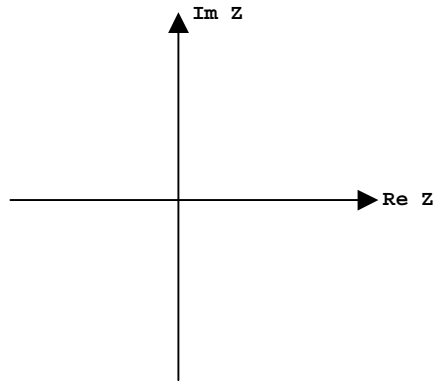
Considere os pontos  $A = (-2,0)$ ,  $B = (2,0)$ ,  $C = (0,3)$  e  $P = (0, \alpha)$ , com  $0 < \alpha < 3$ . Pelo ponto  $P$ , traçamos as três retas paralelas aos lados do triângulo  $ABC$ .



- a) Determine, em função de  $\alpha$ , a área da região sombreada na figura.
- b) Para que valor de  $\alpha$  essa área é máxima?

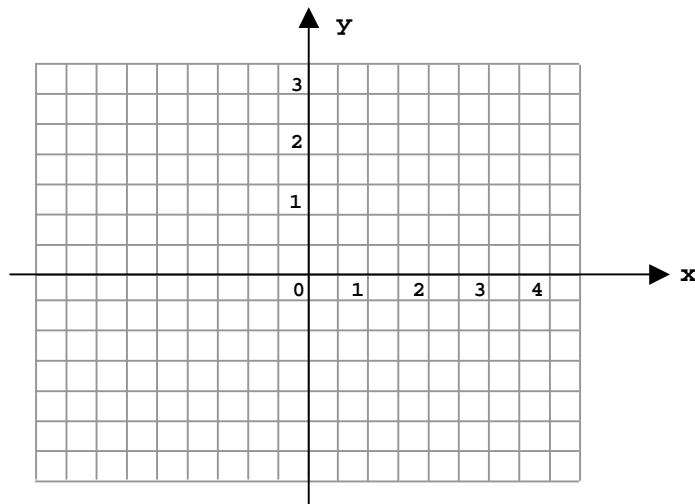
Q.03

- a) Determine todas as soluções, no campo complexo, da equação  $\bar{z} = iz^2$ , onde  $i$  é a unidade imaginária, isto é,  $i^2 = -1$  e  $\bar{z}$  é o conjugado de  $z$ .
- b) Represente essas soluções no plano complexo, usando o sistema de coordenadas desenhado ao lado.



Q.04

- a) Esboce, para  $x$  real, o gráfico da função  $f(x) = |x - 2| + |2x + 1| - x - 6$ . O símbolo  $|a|$  indica o valor absoluto de um número real  $a$  e é definido por  $|a| = a$ , se  $a \geq 0$  e  $|a| = -a$ , se  $a < 0$ .
- b) Para que valores reais de  $x$ ,  $f(x) > 2x + 2$ ?



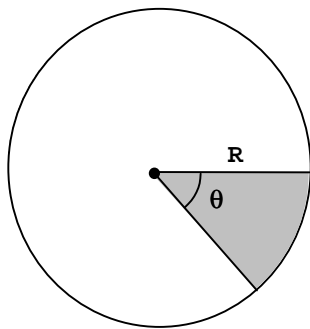
Q.05

Um investidor quer aplicar 120 mil reais. Seu corretor lhe oferece um investimento, em duas fases, com as seguintes regras:

- Na 1ª fase do investimento, ocorrerá um dentre os dois eventos seguintes: com probabilidade  $p$ , o investidor ganha metade do que investiu; com probabilidade  $(1 - p)$ , o investidor perde um terço do que investiu.
  - Na 2ª fase do investimento, a quantia final da 1ª fase será reinvestida, de forma independente da 1ª fase. Neste novo investimento, ocorrerá um dentre os dois eventos seguintes: com probabilidade  $1/2$ , o investidor ganha a quarta parte do que foi reinvestido; com probabilidade  $1/2$ , o investidor perde metade do que foi reinvestido.
- a) Se o investidor aplicar seu dinheiro desta forma, com que valores pode ficar ao término do investimento? Qual a probabilidade, em função de  $p$ , de ficar com cada um desses valores?
- b) Uma revista especializada informa que, neste investimento, a probabilidade de perder dinheiro é 70%. Admitindo como correta a informação da revista, calcule  $p$ .

Q.06

Um setor circular, com ângulo central  $\theta$  ( $0 < \theta < 2\pi$ ), é recortado de um círculo de papel de raio  $R$  (ver figura). Utilizando o restante do papel, construímos a superfície lateral de um cone circular reto.

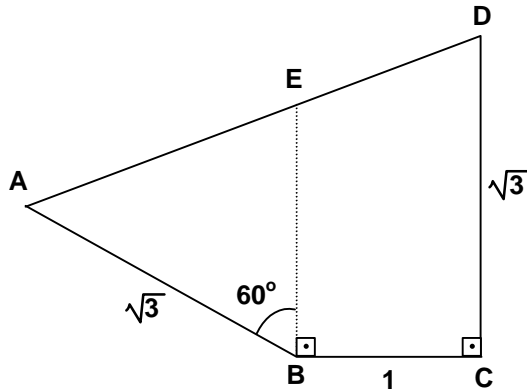


Determine, em função de  $R$  e  $\theta$ ,

- a) o raio da base do cone.
- b) o volume do cone.

Q.07

No quadrilátero ABCD da figura abaixo, E é um ponto sobre o lado  $\overline{AD}$  tal que o ângulo  $\widehat{ABE}$  mede  $60^\circ$  e os ângulos  $\widehat{EBC}$  e  $\widehat{BCD}$  são retos. Sabe-se ainda que  $AB = CD = \sqrt{3}$  e  $BC = 1$ . Determine a medida de  $\overline{AD}$ .



Q.08

Dois colecionadores de selos têm, juntos, 500 selos. Cada colecionador comprou um álbum para colocar seus selos. Os dois álbuns eram idênticos, tendo o mesmo número de páginas.

Se o primeiro colecionador colocar exatamente 21 selos em cada página, ele vai conseguir colocar todos os seus selos e usar todas as páginas do álbum.

Se o segundo colecionador colocar 20 de seus selos em cada página do álbum, sobrarão alguns selos. Caso ele coloque 23 selos em cada página, sobra pelo menos uma, totalmente vazia, podendo haver ainda uma outra página com menos de 23 selos.

Quantas páginas há no álbum?

Q.09

Determine os números reais  $x$  e  $y$ , com  $0 \leq x + y \leq \pi$  e  $0 \leq y \leq \pi$ , tais que

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -\frac{1}{4} \\ \cos(x + y) + \cos(x - y) = \frac{3}{2} \end{cases} .$$

Q.10

São dados os pontos A e B (página seguinte). Usando régua e compasso, construa a circunferência circunscrita a um polígono regular de 12 lados, que tem o segmento  $\overline{AB}$  como um de seus lados. Descreva e justifique as construções utilizadas.

